

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ БЭКЛУНДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Нахождение точных решений нелинейных уравнений в частных производных – одна из основных задач теории нелинейных систем. Для интегрируемых систем разработан ряд методов, но в силу сложности различных нелинейных уравнений не существует единого способа и приема их решения. Один из эффективных методов – применение дифференциальных связей Бэклунда для построения точных решений нелинейных уравнений. Преобразования Бэклунда дают возможность перейти к более простому уравнению, а применение дифференциальных связей – получить решение одного из уравнений, если решение другого известно. Кроме этого, данные преобразования играют важную роль в интегрируемых системах, так как выявляют внутренние связи между различными интегрируемыми свойствами. В последнее время в этой области было проведено множество исследований. Цель работы – получение решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных второго порядка с помощью дифференциальных связей Бэклунда.

Материалы и методы. Рассматривается нахождение решений нелинейных дифференциальных уравнений с применением дифференциальных связей Бэклунда. Построение преобразований Бэклунда базируется на методе, предложенном Клэрэном, для уравнений второго порядка типа Монжа – Ампера.

Результаты. Для исследуемых в работе нелинейных гиперболических уравнений в частных производных получены точные решения с помощью дифференциальных связей Бэклунда; доказано получение решений одного из уравнений, если решение другого известно; проанализированы различные случаи получения решений данным методом.

Выводы. Результаты представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Найденные решения могут послужить основой для дальнейших исследований уравнений данного типа, а также для решения прикладных задач в различных областях естествознания.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, гиперболические уравнения, преобразования Бэклунда, метод Клэрэна, дифференциальные связи, уравнение Лиувилля.

Т. В. Red'kina, О. В. Novikova

APPLICATION OF BACKLUND DIFFERENTIAL CONSTRAINT FOR CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

Abstract.

Background. Finding exact solutions of nonlinear partial differential equations is one of the main problems of the nonlinear systems theory. A number of methods have been developed for integrable systems, but due to the complexity of various nonlinear equations, there is no single method and method for solving them. One of the effective methods is the use of Backlund differential constraints for constructing exact solutions of nonlinear equations. Backlund transformations make it possible to go to a simpler equation, and the use of differential constraints - to obtain a solution to one of the equations if the solution to the other is known. In addition, these transformations play an important role in integrable systems, since they reveal internal connections between various integrable properties. Recently, a lot of research has been done in this area. The aim of this work is to obtain solutions of nonlinear hyperbolic second-order partial differential equations using Bäcklund differential constraints.

Materials and methods. Finding solutions to nonlinear differential equations using Bäcklund differential constraints is considered. The construction of Bäcklund transformations is based on the method proposed by Claren for second-order equations of the Monge-Ampere type.

Results. For the nonlinear hyperbolic partial differential equations investigated in this work, exact solutions are obtained using Bäcklund differential constraints; the solution of one of the equations is proved if the solution of the other is known; various cases of obtaining solutions by this method are analyzed.

Conclusions. The results are of interest for studying nonlinear partial differential equations. The found solutions can serve as a basis for further research of equations of this type, as well as for solving applied problems in various fields of natural science.

Keywords: nonlinear partial differential equations, hyperbolic equations, Bäcklund transformations, Claren's method, differential constraints, Liouville's equation.

Введение

Нахождение точных решений нелинейных уравнений в частных производных – одна из основных задач раздела математики, посвященного анализу таких уравнений [1–4]. В силу сложности различных нелинейных уравнений не существует единого метода их решения. Для интегрируемых систем разработаны эффективные методы, такие как метод обратной задачи рассеяния [5, 6], метод Хироты [7], метод Пенлеве [8], преобразование Бэклунда [9–11], метод отображения и деформации [6], построение точных решений в виде бегущих волн [12, 13], нахождение автомодельных решений [12–14], применение дифференциальных связей Бэклунда [15–17] и др.

Изучение преобразований Бэклунда – одна из самых интересных тем в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Такие преобразования применяются для нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений. Вместе с этим они представляют собой пример дифференциально-геометрической структуры, порожденной дифференциальными уравнениями. Преобразования Бэклунда дают возможность перейти к более простому уравнению, а применение дифференциальных связей – получить решение одного из уравнений, если решение другого известно. В настоящей статье найдены точные решения нелинейных гиперболических уравнений, полученных в работе [18], с использованием дифференциальных связей Бэклунда.

1. Материал и методика

Построение преобразований Бэклунда базируется на методе, предложенном Клэрэнном [19], для уравнений второго порядка типа Монжа – Ампера [20].

Рассмотрим нелинейные гиперболические уравнения в частных производных [18]:

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} e^v [1 + 2v] v_{\xi} - v_{\xi} v_{\eta}, \quad (1)$$

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v [v_{\eta} - v_{\xi}], \quad (2)$$

Для рассматриваемых уравнений определены дифференциальные связи Бэклунда. Приведем некоторые из них для облегчения понимания дальнейших исследований.

Утверждение 1 [18]. Преобразования Бэклунда

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1 + 2e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 4e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} v e^{2v} \quad (3)$$

связывают уравнение (1) с уравнением

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (w_{\xi} - 1)(w - \xi) \left(\frac{1}{2} + \ln \left[\frac{1}{2} (w - \xi) \right] \right) - w_{\xi\eta} = 0. \quad (4)$$

Утверждение 2 [18]. Для уравнения (1) существует автопреобразование Бэклунда вида

$$e^g \frac{\partial g}{\partial \xi} = e^v \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad e^g \frac{\partial g}{\partial \eta} = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} v e^{2v}. \quad (5)$$

Утверждение 3 [18]. Преобразования Бэклунда вида

$$w_{\xi\xi} = w_{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v w_{\xi}, \quad w_{\xi\eta} = \frac{w_{\xi}}{2} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v w_{\xi} \quad (6)$$

связывают уравнение (2) с уравнением

$$(w^2)_{\xi\eta} = 4w_{\xi}^2. \quad (7)$$

Опираясь на данные дифференциальные связи Бэклунда, найдем точные решения исследуемых уравнений.

2. Результаты

Теорема 1. Если уравнение (7) имеет решение

$$w = 2\eta + \xi, \quad (8)$$

то уравнение (2) имеет решение

$$v = -\ln \left(C - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} [\xi + \eta] \right), \quad C = \text{const.} \quad (9)$$

Доказательство. Воспользуемся найденными преобразованиями (6) и подставим известное решение (8), тогда система примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v,$$

откуда из системы находим

$$e^{-v} = C - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} [\xi + \eta],$$

где C – произвольная постоянная. В результате найдено решение (9) уравнения (2).

Выполним некоторые преобразования в уравнении (7). Умножим обе части на w^2 :

$$w^2 (w^2)_{\xi\eta} - \left[(w^2)_{\xi} \right]^2 = 0,$$

сделаем замену функции $w^2 = \omega$, тогда можно легко найти решение полученного уравнения:

$$\omega \omega_{\xi\eta} - \omega_{\xi}^2 = 0;$$

$$\omega = P(\xi)Q(\eta), \quad P(\xi)Q(\eta)P'(\xi)Q'(\eta) = [P'(\xi)Q(\eta)]^2,$$

$$\frac{Q'(\eta)}{Q(\eta)} = \frac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \lambda, \quad Q(\eta) = e^{\lambda\eta}, \quad P(\xi) = e^{\lambda\xi},$$

$$\omega = e^{\lambda[\eta+\xi]},$$

следовательно, уравнение (7) имеет решение вида

$$w = e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad \lambda = \text{const.} \quad (10)$$

Теорема 2. Если уравнение (7) имеет решение (10), то уравнение (2) имеет решение

$$v = \ln \lambda + \lambda \left(\eta + \frac{1}{2} \xi \right) - \ln \left| 1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda[\eta+\frac{1}{2}\xi]} \right|. \quad (11)$$

Доказательство. Используя найденное преобразование (6), подставим известное решение (10):

$$w = e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad w_{\xi} = \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} = w_{\eta}, \quad w_{\xi\xi} = \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} = w_{\eta\xi},$$

тогда система примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} &= \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v, \\ \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} &= \frac{\lambda}{4} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}[\eta+\xi]}, \quad \lambda = \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v, \end{aligned} \quad (12)$$

откуда из первого линейного уравнения в частных производных находим связь между независимыми переменными ξ, η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v, \quad \int \frac{\partial e^v}{\frac{\lambda}{2} e^v + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{2v}} = \xi + \varphi(\eta), \\ \int \frac{\partial e^v}{\frac{\lambda}{2} e^v + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{2v}} &= \frac{2}{\lambda} \ln e^v - \frac{2}{\lambda} \ln \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v \right] = \xi + \varphi(\eta), \\ \frac{e^v}{\frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^v} &= e^{\frac{\lambda}{2}\eta} \psi(\xi), \quad e^v = \frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)}{2 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)}, \end{aligned}$$

где $\varphi(\eta)$ – произвольная функция, а из второго уравнения системы (12) определяем вид функции $\varphi(\eta)$:

$$\frac{e^v}{\lambda + \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v} = e^{\lambda\eta} \psi(\xi), \quad e^v = \frac{\lambda e^{\lambda\eta} \psi(\xi)}{1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda\eta} \psi(\xi)}.$$

Выполнив интегрирование и обратные преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)}{2 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta)} &= \frac{\lambda e^{\lambda\eta} \psi(\xi)}{1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda\eta} \psi(\xi)}, \\ e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta) \left(1 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\lambda\eta} \psi(\xi) \right) &= e^{\lambda\eta} \psi(\xi) \left(2 - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \varphi(\eta) \right), \\ \varphi(\eta) &= 2e^{\lambda\eta}, \quad \psi(\xi) = e^{\frac{\lambda}{2}\xi}. \end{aligned}$$

В результате найдено решение (11) уравнения (2).

Теорема 3. Если уравнение (2) имеет решение

$$v = \alpha(\eta + \xi), \quad (13)$$

то уравнение (7) имеет решение

$$w = -\frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \exp \left[-\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \frac{\alpha}{2} \eta \right]. \quad (14)$$

Доказательство. Воспользуемся преобразованиями Бэклунда (6) и подставим туда имеющееся значение (13), тогда получим систему уравнений

$$(\ln w_\xi)_\xi = \alpha - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}, \quad (\ln w_\xi)_\eta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)},$$

которую легко можно проинтегрировать по соответствующим переменным:

$$\ln w_\xi = \alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \varphi(\eta), \quad \ln w_\xi = \frac{\alpha}{2} \eta - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \psi(\xi), \quad (15)$$

где $\varphi(\eta)$, $\psi(\xi)$ – постоянные интегрирования. Доопределим функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\xi)$ так, чтобы полученные значения правых частей системы (15) совпали:

$$\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \varphi(\eta) = \frac{\alpha}{2} \eta - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \psi(\xi).$$

Это возможно, если

$$\varphi(\eta) = \frac{\alpha}{2} \eta, \quad \psi(\xi) = \alpha\xi.$$

В результате определилось значение

$$w_\xi = e^{\alpha \left[\xi + \frac{1}{2} \eta \right] - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}}.$$

Выполним интегрирование и получим неизвестную функцию $w(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} w &= \int e^{\alpha \left[\xi + \frac{1}{2} \eta \right] + \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}} d\xi = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} \eta} \int e^{-\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}} de^{\alpha[\xi+\eta]} = \\ &= -\frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} e^{-\frac{\alpha}{2} \eta} e^{-\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)}} + \varphi(\eta), \end{aligned}$$

где $\varphi(\eta)$ – произвольная функция.

Полученная функция содержит неизвестную функцию

$$w = -\frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \exp \left[-\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \frac{\alpha}{2} \eta \right] + \varphi(\eta),$$

которую необходимо доопределить. Для уточнения $\varphi(\eta)$ выполним подстановку найденной функции в уравнение (7). Определим $w_\xi^2(\xi, \eta)$ и $(w^2)_{\xi\eta}$:

$$\begin{aligned}
 w^2 &= \left(\frac{16\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \right)^2 \exp \left[-\frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \alpha\eta \right] - \\
 &- \frac{32\alpha_{11}^2}{\alpha_{21}} \varphi(\eta) \exp \left[-\frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} - \frac{\alpha}{2}\eta \right] + \varphi^2(\eta), \\
 (w^2)_{\xi\eta} &= 4 \exp \left[\alpha(\eta+2\xi) - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} \right] + \\
 &+ 2\varphi'(\eta) \exp \left[\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right] + \\
 &+ \varphi(\eta) \left[-\frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \alpha \right] \exp \left[\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right]; \\
 w_\xi &= \exp \left[\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right], \quad w_\xi^2 = \exp \left[2\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \alpha\eta \right].
 \end{aligned}$$

Равенство (7) будет выполняться тождественно, если

$$\begin{aligned}
 &2\varphi'(\eta) \exp \left[\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right] + \\
 &+ \varphi(\eta) \left[-\frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \alpha \right] \exp \left[\alpha\xi - \frac{\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} + \frac{\alpha}{2}\eta \right] = 0; \\
 &2\varphi'(\eta) + \varphi(\eta) \left[\alpha - \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^{\alpha(\eta+\xi)} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение на функцию $\varphi(\eta)$ зависит от переменной ξ , чего быть не должно, следовательно, необходимо положить $\varphi(\eta) = 0$. В результате искомая функция имеет вид (14).

Теорема доказана.

Зная некоторые частные решения уравнения (1), найдем и решения (4).

Теорема 4. Уравнение (4) имеет решение, заданное неявно в виде ряда

$$\ln \left| \ln \left[\frac{1}{2}(w - \xi) \right] \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \ln^n \left[\frac{1}{2}(w - \xi) \right] = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma\xi + \eta) + C_2,$$

где постоянная γ, C_2 – произвольные постоянные.

Теорема 5. Если уравнение (1) имеет решение $v = a$, то уравнение (4) имеет решение

$$w = \xi - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} ae^{2a}\eta. \quad (16)$$

Доказательство. Подставляем $v = a$ в найденные дифференциальные связи (3) и выполняем интегрирование каждого равенства:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1, \quad w = \xi + \varphi(\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} ae^{2a}, \quad w = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} ae^{2a}\eta + \psi(\xi).$$

Приравниваем полученные выражения для w и доопределяем произвольные функции $\varphi(\eta), \psi(\xi)$. В результате получаем решение (16).

Теорема 6. Если уравнение (1) имеет решение $v = \eta$, то уравнение (4) имеет решение

$$w = 4e^\eta - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{16\alpha_{11}} [2\eta - 1]e^{2\eta} + \xi. \quad (17)$$

Доказательство. Подставляем $v = \eta$ в найденные дифференциальные связи (3) и выполняем интегрирование каждого равенства:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 1, \quad w = \xi + \varphi(\eta),$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 4e^\eta - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}} \eta e^{2\eta}, \quad w = 4e^\eta - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{16\alpha_{11}} [2\eta - 1]e^{2\eta} + \psi(\xi).$$

Приравниваем полученные выражения для w и доопределяем произвольные функции $\varphi(\eta), \psi(\xi)$. В результате получаем равенство (17).

Воспользуемся найденными автопреобразованиями Бэклунда (5) для уравнения (1) и уже ранее построенным его решением (12).

Если будем считать, что

$$\ln|g| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n \cdot n!} + C_2 = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma\xi + \eta), \quad (18)$$

то с помощью автопреобразований (5) можно найти новое решение уравнения (1). Подставим (18) в левую часть (5), для этого продифференцируем (18) по ξ и η , имеем:

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma \frac{1}{\frac{1}{g} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{g^{n-1}}{n!}} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma g e^{-g}, \quad \frac{dg}{d\eta} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} g e^{-g},$$

тогда на функцию $v(\xi, \eta)$ получим систему

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} g = \frac{1}{\gamma} e^v \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} g = 2e^v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} v e^{2v}.$$

Приравнивая левые части, получим линейное уравнение первого порядка:

$$2 \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} v e^v. \quad (19)$$

Чтобы найти общее решение этого уравнения, надо найти первые интегралы системы

$$\frac{d\eta}{2} = -\gamma \frac{d\xi}{1} = \frac{8\alpha_{11}}{\alpha_{32}\alpha_{21}} \frac{dv}{ve^v},$$

$$2\gamma\xi + \eta = C_1, \quad \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[\ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] + \xi = C_2. \quad (20)$$

Общее решение (19) имеет вид

$$F \left(2\gamma\xi + \eta, \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[\ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] + \xi \right) = C, \quad (21)$$

где F – произвольная функция.

Произвольная функция F (21) удовлетворяет линейному уравнению, но (1) – нелинейно, поэтому следует уточнить вид функции F .

Выполним подстановку (20) в (1). Найдем производные $v_\xi, v_\eta, v_{\eta\xi}$:

$$2\gamma F_1 + \left(1 + \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} v_\xi \left[\frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{v^{n-1}}{n!} \right] \right) F_2 = 0,$$

$$F_1 + F_2 \frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} v_\eta \left[\frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{v^{n-1}}{n!} \right] = 0$$

(здесь F_1 – производная от F по первой компоненте, а F_2 – производная от F по второй компоненте), откуда получаем

$$v_\xi = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left(2\gamma \frac{F_1}{F_2} + 1 \right) v e^v, \quad v_\eta = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \frac{F_1}{F_2} v e^v. \quad (22)$$

Продифференцируем первое равенство (22) по переменной η и найдем смешенную производную:

$$v_{\eta\xi} = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left(2\gamma \frac{F_{11}}{F_2} - 2\gamma \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} + \left(\frac{F_{12}}{F_2} - \frac{F_1}{F_2^2} F_{22} \right) \left[\frac{8\alpha_{11}}{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}} \frac{e^{-v}}{v} v_\xi + 1 \right] \right) v e^v -$$

$$-\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \frac{F_1}{F_2} (1+v) e^v v_\xi = -\frac{\gamma\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left(\frac{2\gamma F_{11} + F_{12}}{F_2} - \frac{F_1}{F_2^2} [2\gamma F_{12} + F_{22}] \right) v e^v -$$

$$-\left(\frac{F_{12}}{F_2} - \frac{F_1}{F_2^2} F_{22}\right) v_\xi - \frac{\gamma \alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} \frac{F_1}{F_2} e^v (1+v) v_\xi = 2\gamma \frac{\gamma \alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} \times \\ \times \left[2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} \right] v e^v + \left(\frac{\gamma \alpha_{32} \alpha_{21}}{8 \alpha_{11}} \right)^2 \frac{F_1}{F_2} v e^{2v} (1+v) \left(2\gamma \frac{F_1}{F_2} + 1 \right).$$

Подставим найденные значения в (1) и сократим на значения, отличные от нуля:

$$\frac{16 \alpha_{11}}{\alpha_{32} \alpha_{21}} \left[2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} \right] = - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{F_1}{F_2} \right) \left(2\gamma \frac{F_1}{F_2} + 1 \right) e^v (1+2v). \quad (23)$$

Как видно, равенство (23) тождественно не выполняется, поэтому надо потребовать, чтобы выполнялась одна из систем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} + \frac{F_1}{F_2} = 0, \\ 2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{F_1}{F_2} = -\frac{1}{2\gamma}, \\ 2 \frac{F_1}{F_2^2} F_{12} - \frac{F_1^2}{F_2^3} F_{22} - \frac{F_{11}}{F_2} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Все члены равенств являются однородными, поэтому воспользуемся приемом, позволяющим разделить аргументы функции, представим F в виде

$$F = X(C_1)Y(C_2),$$

где X зависит от первой компоненты C_1 функции F , а Y — от второй компоненты C_2 (20), тогда первое равенство системы (24) примет вид (в силу аналогичности первых равенств систем результат подстановки для второй системы будет записываться в скобках):

$$X'Y = -\frac{1}{\gamma} XY', \quad \left(X'Y = -\frac{1}{2\gamma} XY' \right), \quad \text{или} \quad \frac{X'}{X} = -\frac{1}{\gamma} \frac{Y'}{Y} = \lambda, \quad \left(\frac{X'}{X} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{Y'}{Y} = \lambda \right),$$

где λ — произвольный параметр. Функции примут вид

$$\ln|X| = \lambda C_1, \quad \ln|Y| = -\gamma \lambda C_2 \quad (\ln|X| = \lambda C_1, \quad \ln|Y| = -2\gamma \lambda C_2),$$

что приводит к следующему виду функции $F(C_1, C_2)$:

$$F(C_1, C_2) = e^{\lambda C_1 - \gamma \lambda C_2}, \quad \left(F(C_1, C_2) = e^{\lambda C_1 - 2\gamma \lambda C_2} \right), \quad (25)$$

где

$$\lambda[C_1 - \gamma C_2] = \lambda \left[\gamma \xi + \eta - \frac{8 \alpha_{11}}{\alpha_{32} \alpha_{21}} \left[\ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] \right],$$

$$\left(\lambda[C_1 - 2\gamma C_2] = \lambda\eta - \lambda \frac{8\alpha_{11}}{\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[\ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] \right).$$

Связь между компонентами C_1, C_2 , удовлетворяющая второй системе (выражение в скобках), привела к отсутствию зависимости от переменной ξ , поэтому этот случай в дальнейшем рассматриваться не будет.

Осталось проверить выполнение второго равенства системы; подставим (25) в (24):

$$-2 \frac{\lambda^3 \gamma}{(-\gamma \lambda)^2} - \frac{\lambda^2}{(-\gamma \lambda)^3} (-\gamma \lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{-\gamma \lambda} = -2 \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma} = 0.$$

Условие выполняется тождественно, следовательно, вид функции (21)–(25). Зависимость от λ не существенная, поэтому положим $\lambda = 1$. Доказана следующая

Теорема 7. Уравнение (1) имеет решение

$$\exp \left(\gamma \xi + \eta - \frac{8\alpha_{11}}{\alpha_{32}\alpha_{21}} \left[\ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} \right] \right) = C. \quad (26)$$

Заключение

В работе получены точные решения нелинейных гиперболических уравнений в частных производных с помощью дифференциальных связей Бэклунда; доказано получение решений одного из уравнений, если решение другого известно; проанализированы различные случаи получения решений данным методом. В частности, для рассматриваемых уравнений и связанных с ними преобразованиями Бэклунда получены решения, заданные неявно в виде ряда, и решения, содержащие логарифмические и экспоненциальные функции.

Результаты могут использоваться для дальнейших исследований уравнений данного типа, а также для решения прикладных задач в различных областях естествознания.

Библиографический список

1. Ремизов, И. Д. Решение уравнения Шредингера с помощью оператора сдвига / И. Д. Ремизов // Математические заметки. – 2016. – Т. 100, № 3. – С. 477–480.
2. Смирнов, А. О. Решение нелинейного уравнения Шредингера в виде двух-фазных странных волн / А. О. Смирнов // Теоретическая и математическая физика. – 2012. – Т. 173, № 1. – С. 89–103.
3. Демонтис, Ф. Точные решения модифицированного уравнения Кортевега де-Фриза / Ф. Демонтис // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 168, № 1. – С. 35–48.
4. Царев, С. П. Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными / С. П. Царев // Теоретическая и математическая физика. – 2000. – Т. 122, № 1. – С. 144–160.
5. Method for solving the Korteweg – de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Physical Review Letters. – 1967, № 19. – P. 1095–1097.

6. The Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Method for exact solutions / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1974. – № 27. – P. 97–133.
7. **Hirota, R.** Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons / R. Hirota // *Physical Review Letters*. – 1971. – № 27. – P. 1192–1194.
8. **Ablowitz, M. J.** Solitons, nonlinear equations and inverse scattering / M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
9. **Барбашов, Б. М.** Преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля и калибровочные условия в теории релятивистской струны / Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко // *Теоретическая и математическая физика*. – 1983. – Т. 56, № 2. – С. 180–191.
10. **Кривонос, С. О.** Суперполевые расширения уравнения Лиувилля : дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01.04.02 / Кривонос С. О. – Дубна, 1984. – 109 с.
11. **Иванов, Е. А.** Преобразования Бэклунда для суперрасширений уравнения Лиувилля / Е. А. Иванов, С. О. Кривонос // *Теоретическая и математическая физика*. – 1986. – Т. 66, № 1. – С. 90–101.
12. **Полянин, А. Д.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – Москва : Физматлит, 2005. – 256 с.
13. **Тарасевич, Ю. Ю.** Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple : метод. рекомендации / Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань, 2010. – 23 с.
14. **Калоджеро, Ф.** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – Москва : Мир, 1985. – 472 с.
15. **Редькина, Т. В.** Преобразования Бэклунда для системы уравнений в частных производных третьего порядка / Т. В. Редькина // *Наука. Инновации. Технологии*. – 2017. – № 4. – С. 23–42.
16. Construction of Backlund transformations by the Clearance method for solving the generalized Liouville equation / R. G. Zakinyan, A. R. Zakinyan, T. V. Redkina, O. B. Surneva, O. S. Yanovskaya // *Axioms*. – 2019. – Vol. 8, № 45. – P. 1–17.
17. **Закинян, Р. Г.** Преобразования Бэклунда для нелинейных уравнений с гиперболической линейной частью / Р. Г. Закинян, Т. В. Редькина // *Перспективные направления науки и техники : материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. (7–15 сентября 2012 г.)*. – Вып. 18. – Пшемысль : Наука и студия, 2012. – С. 24–28.
18. **Сурнева, О. Б.** Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка / О. Б. Сурнева, О. С. Яновская // *Наука. Инновации. Технологии*. – 2018. – № 3. – С. 37–52.
19. **Лэм, Д. Л.** Введение в теорию солитонов / Д. Л. Лэм. – Москва : Мир, 1983. – 294 с.
20. **Погорелов, А. В.** Многомерное уравнение Монжа – Ампера / А. В. Погорелов. – Москва : Наука, 1988. – 96 с.

References

1. Remizov I. D. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2016, vol. 100, no. 3, pp. 477–480. [In Russian]
2. Smirnov A. O. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2012, vol. 173, no. 1, pp. 89–103. [In Russian]
3. Demontis F. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2011, vol. 168, no. 1, pp. 35–48. [In Russian]

4. Tsarev S. P. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2000, vol. 122, no. 1, pp. 144–160. [In Russian]
5. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. *Physical Review Letters*. 1967, no. 19, pp. 1095–1097.
6. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1974, no. 27, pp. 97–133.
7. Hirota R. *Physical Review Letters*. 1971, no. 27, pp. 1192–1194.
8. Ablowitz M. J., Clarkson P. A. *Solitons, nonlinear equations and inverse scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 516 p.
9. Barbashov B. M., Nesterenko V. V. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1983, vol. 56, no. 2, pp. 180–191. [In Russian]
10. Krivonos S. O. *Superpolevye rasshireniya uravneniya Liuvillya: dis. kand. fiz.-matem. nauk: 01.04.02* [Superfield extensions of the Liouville equation: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences 01.04.02]. Dubna, 1984, 109 p. [In Russian]
11. Ivanov E. A., Krivonos S. O. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1986, vol. 66, no. 1, pp. 90–101. [In Russian]
12. Polyanin A. D., Zaytsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 256 p. [In Russian]
13. Tarasevich Yu. Yu. *Nakhozhdenie i vizualizatsiya avtomodel'nykh resheniy differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh sredstvami Maple: metod. rekomendatsii* [Finding and visualizing self-similar solutions of partial differential equations by means of Maple: methodological recommendations]. Astrakhan, 2010, 23 p. [In Russian]
14. Kalodzhero F., Degasperis A. *Spektral'nye preobrazovaniya i solitony. Metody resheniya i issledovaniya evolyutsionnykh uravneniy* [Spectral transformations and solitons. Methods for solving and researching evolutionary equations]. Moscow: Mir, 1985, 472 p. [In Russian]
15. Red'kina T. V. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovations. Technologies]. 2017, no. 4, pp. 23–42. [In Russian]
16. Zakinyan R. G., Zakinyan A. R., Redkina T. V., Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Axioms*. 2019, vol. 8, no. 45, pp. 1–17.
17. Zakinyan R. G., Red'kina T. V. *Perspektivnye napravleniya nauki i tekhniki: materialy VIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (7–15 sentyabrya 2012 g.)* [Promising areas of science and technology: proceedings of the 8th International scientific and practical conference (7–15 September, 2012)]. Issue 18. Pshemysl: Nauka i studiya, 2012, pp. 24–28. [In Russian]
18. Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovations. Technologies]. 2018, no. 3, pp. 37–52. [In Russian]
19. Lem D. L. *Vvedenie v teoriyu solitonov* [Introduction to the theory of solitons]. Moscow: Mir, 1983, 294 p. [In Russian]
20. Pogorelov A. V. *Mnogomernoe uravnenie Monzha – Ampera* [Multidimensional Monge-Ampere equation]. Moscow: Nauka, 1988, 96 p. [In Russian]

Редькина Татьяна Валентиновна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра прикладной математики
и математического моделирования,
Северо-Кавказский федеральный
университет (Россия, г. Ставрополь,
ул. Пушкина, 1)

E-mail: tvr59@mail.ru

Red'kina Tat'yana Valentinovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of applied mathematics
and mathematical modeling, North
Caucasian Federal University
(1 Pushkina street, Stavropol, Russia)

Новикова Ольга Викторовна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра информационной
безопасности автоматизированных
систем, Северо-Кавказский федеральный
университет (Россия, г. Ставрополь,
ул. Пушкина, 1)

E-mail: oly-novikova@yandex.ru

Novikova Ol'ga Viktorovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of information security
of automated systems, North Caucasian
Federal University (1 Pushkina street,
Stavropol, Penza)

Образец цитирования:

Редькина, Т. В. Применение дифференциальных связей Бэклунда для построения точных решений нелинейных гиперболических уравнений / Т. В. Редькина, О. В. Новикова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 54–67. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-5.